Poincaré

(Richiamo on line **p. 256**)

La vita del giovane Poincaré è segnata dal dramma della guerra franco-prussiana

Henri Poincaré (1854-1912) nasce a Nancy, al margine più occidentale della Lorena, da una famiglia benestante della borghesia possidente. Il padre è un medico di successo e professore dell'università cittadina, e suo fratello (lo zio di Henri) un alto funzionario dell'amministrazione pubblica.
La madre cura con impegno costante e talento educativo la sua istruzione, tanto che a scuola sbalordisce insegnanti e compagni per la facilità con cui eccelle in ogni materia, benché appaia spesso distratto dalle sue fantasticherie e privo di ambizioni.
A sedici anni il suo animo è segnato per sempre dalla guerra franco-prussiana. La zona di Nancy è infatti al centro degli scontri militari dell'estate 1870 con i quali l'esercito prussiano si apre il varco dell'invasione della Francia, nelle settimane precedenti all'annientamento dell'esercito di Napoleone III più a nord, a Sedan, il 1° settembre 1870.
Poincaré adolescente vive con orrore una serie drammatica di esperienze: prima il padre che cura nelle stanze di casa i militari francesi feriti, con il sangue che scorre su pavimenti e pareti, poi, la madre che si dispera per la distruzione di alberi, animali ed edifici della sua tenuta di campagna; infine i tedeschi occupanti che impongono alla famiglia di ospitare alcuni loro ufficiali (il trattato di pace stipulato il 26 febbraio 1871 impone alla Francia la permanenza dell'esercito tedesco sui territori francesi occupati fino al pagamento completo di una determinata indennità di guerra alla Germania: dal regno di Prussia vittorioso è nato il 18 gennaio 1871 il Secondo Reich di Germania). Nancy rimane dunque sotto l'occupazione tedesca, e nella casa Poincaré sono alloggiati ufficiali tedeschi a spese della famiglia, fino al 1873, quando la Francia completa il pagamento della sua indennità di guerra. Le conseguenze del dramma vissuto in quel periodo sulla formazione dell'adolescente Poincaré sono di varia natura: sviluppa un impulso psicologicamente e moralmente reattivo alla mitezza ed alla disponibilità al dialogo, un impulso che lo accompagnerà per tutta la vita; consegue una perfetta padronanza della lingua tedesca, appresa dalla presenza quotidiana in casa di ufficiali tedeschi, che gli servirà negli studi; sviluppa un'inclinazione al nazionalismo revanscista francese, che gli impedirà di portare nelle valutazioni politiche la sua intelligenza scientifica. Questa è del resto l'impronta della famiglia e della città.
Si laurea nel 1875 in ingegneria a Nancy, lavora poi per breve tempo in città come ingegnere minerario (la branca dell'ingegneria in cui si è laureato), e si laurea infine nel 1879 in matematica a Parigi, diventando subito assistente universitario di matematica nell'università di Caen.
Nel 1887 l'Accademia francese delle scienze lo considera già il massimo matematico vivente
Questo matematico venticinquenne viene a conoscenza, a Caen, di un bando di concorso dell'Accademia francese delle scienze per il seguente compito: "Perfezionare in qualche punto importante la teoria delle equazioni differenziali ad una variabile indipendente". Egli partecipa al concorso inviando a Parigi, nel maggio 1880, un saggio in cui propone la soluzione di tali equazioni attraverso l'introduzione di una classe di funzioni a variabile complessa. Il saggio non ottiene il primo premio, assegnato al già prestigioso matematico Georges Halphen, ma soltanto un particolare encomio. A questo primo saggio segue, dall'estate 1880, una serie prodigiosa di scritti di Poincaré, che spaziano pressoché in ogni ramo della matematica, compresa la fisica matematica, disciplina nella quale egli ottiene nel 1886 una cattedra universitaria alla Sorbona. Quando ha trentatré anni non ancora compiuti, l'Accademia francese delle scienze, accogliendolo tra i suoi membri il 24 gennaio 1887, lo considera il massimo matematico vivente. Muore a Parigi nel 1912.

La famiglia Poincaré protagonista della politica francese nei primi decenni del '900 Raymond Poincaré, che dominerà la politica francese dal 1912 al 1924 (come presidente della Repubblica dal 1913 al 1920 e come capo del governo prima e dopo) in nome di un nazionalismo aggressivo e spesso ottuso, altri non è che il cugino di primo grado di Henri (figlio del fratello di suo padre).
Nancy è dopo la fine della guerra e dell'occupazione, una città diventata di confine, perché tutto il

resto della Lorena è stato annesso, con l'Alsazia, alla Germania, per cui vi fiorisce una difesa anche esasperata dell'identità linguistica e culturale francese.

La sua opera ha avuto un ruolo fondamentale nella cultura tra Ottocento e Novecento
Oggi sappiamo che Poincaré è stato non soltanto il massimo matematico del suo tempo, ma anche l'ultimo matematico universale. Dopo di lui, i rami degli studi matematici si sono così estesi da generare gli specialisti.
Il suo pensiero matematico tocca inoltre questioni epistemologiche di massimo rilievo.

1. Le geometrie non euclidee e la crisi del positivismo

Il saggio inviato da Poincaré nel maggio del 1880 all'Accademia francese delle scienze (vedi sopra) con la proposta di un nuovo metodo di soluzione delle equazioni differenziali a una variabile indipendente, si conclude con una raffigurazione geometrica del procedimento algebrico. La raffigurazione è la seguente: si prenda un cerchio, se ne riempia la superficie di quadrilateri curvilinei i cui lati siano archi di circonferenza ortogonali al cerchio, e si ricavi la serie intera di tali quadrilateri curvilinei da una certa trasformazione reiterata del primo di essi. Questa trasformazione di tale figura fino al punto in cui la serie delle sue trasformazioni copre per intero la superficie del cerchio dato è la rappresentazione geometrica della funzione algebrica a variabile complessa connessa alla soluzione delle equazioni differenziali a variabile indipendente.

Poincaré delinea lo sviluppo di una geometria non euclidea, detta *iperbolica*
Qualche settimana dopo aver inviato il saggio a Parigi, Poincaré, nel momento in cui sale a Caen su un omnibus che lo conduce a un'escursione geologica, ha un'improvvisa intuizione (il sorgere improvviso e decontestualizzato da un lavoro di ricerca di tante intuizioni scientifiche di Poincaré è stato un importante oggetto di studio da parte della psicologia del Novecento).
L'intuizione è questa: la geometria del piano costruito dalla reiterata trasformazione del quadrilatero curvilineo di cui si è detto nel cerchio, non è euclidea, ma è una particolare geometria non euclidea che è stata denominata *iperbolica.*
Poincaré invia allora all'Accademia francese delle scienze, tra il settembre e il dicembre 1880, tre supplementi al saggio già inoltrato per concorso di cui si è detto nel precedente paragrafo, partendo dalla raffigurazione geometrica posta a conclusione di quel saggio, e sviluppando da essa un filo di ragionamento con cui mostra che la base geometrica di alcune funzioni algebriche è una geometria non euclidea.

L'ammissione di una validità scientifica di geometrie non euclidee avrebbe implicato la confutazione del positivismo e del neokantismo
La straordinarietà di questa scoperta non consente comunque a Poincaré di ottenere il primo premio del concorso, che, come si è già detto, è assegnato nel marzo 1881 ad Halphen. La mentalità

dell'epoca, infatti, guarda con fastidio alle geometrie non euclidee, rimaste fino allora pochissimo conosciute dai matematici e lontane dai problemi considerati importanti in ambito matematico. L'ammissione di una validità scientifica di queste geometrie avrebbe avuto un effetto culturale deflagrante, perché avrebbe significato addirittura la simultanea confutazione del positivismo e del neokantismo.

Dal punto di vista positivistico, infatti, può esserci un solo spazio, quello della Natura come realtà in sé, ed egualmente dal punto di vista kantiano può esservi un solo spazio, quello trascendentale che rende sintetici a priori i giudizi della geometria. Diverse articolazioni della spazialità sarebbero state invece concepibili entro la concezione hegeliana dello spazio come quantità pura dell'esteriorizzazione dell'Idea. Ma l'hegelismo era sostanzialmente scomparso nel secondo Ottocento, e per tutte le filosofie di quell'epoca lo spazio euclideo era lo spazio proprio della realtà naturale, e quindi l'unico vero.

Poincaré è introdotto al tema della geometria non euclidea da un saggio del matematico italiano Eugenio Beltrami

I creatori dei princìpi geometrici non euclidei non avevano dato pubblicità a tali princìpi, né li avevano sviluppati in veri e propri sistemi di geometria come quello di Euclide. Persino il grande Riemann, che aveva trattato il tema della diversità delle possibili ipotesi di base della geometria nella sua dissertazione per la libera docenza tenuta nel 1854 all'università di Gottinga, non aveva mai voluto pubblicarne il testo finché era vissuto. Alla sua morte, nel 1866, il matematico cremonese Eugenio Beltrami ne aveva ripreso i temi in suo saggio, in cui aveva esposto il concetto di geometria non euclidea e la possibilità di tradurla in un modello euclideo, affrontando la questione con prudenza e cautela, come se si trattasse di un argomento proibito. Poincaré, che non era a conoscenza della dissertazione di Riemann a Gottinga, apprende dal saggio di Beltrami la problematica relativa al tema della geometria non euclidea, ed è sulla base di questa conoscenza di seconda mano che ha la straordinaria intuizione di cui si è detto.

Poincaré e Klein concorrono a inserire le geometrie non euclidee, durante gli anni Ottanta dell'Ottocento, nel corpo accettato delle scienze matematiche e a determinare la crisi della concezione positivista della scienza

Negli anni Ottanta dell'Ottocento le geometrie non euclidee sono sviluppate e legittimate da due grandissimi matematici, il prussiano Felix Klein e lo stesso Poincaré, il quale ne tratta in cinque articoli comparsi tra il dicembre 1882 e l'ottobre 1884 sulla rivista "Acta Mathematica". Tra i due intercorre una straordinaria corrispondenza epistolare, di altissimo valore scientifico, ma attraversata da malcelate tensioni, essendo i due matematici anche due nazionalisti di nazioni ostili, Germania e Francia. Poincaré e Klein concorrono comunque, con i loro lavori scientifici, ad inserire finalmente le geometrie non euclidee, durante gli anni Ottanta dell'Ottocento, nel corpo accettato delle scienze matematiche. Essi dimostrano che non c'è una geometria più vera delle altre, perché non c'è un criterio assoluto di verità con cui valutare i loro postulati, ed anche i loro teoremi. Non c'è modo, ad esempio, di misurare la somma degli angoli interni di un triangolo per capire a quale geometria appartenga il teorema giusto, perché il mezzo stesso di misurazione incorpora una geometria e dà risultati conformi ad essa. Crolla così il mito positivista dell'esistenza di una sola scienza che rispecchi la verità della Natura.

✓ Approfondimento storico-culturale

ORIGINE E NATURA DELLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Il problema del quinto postulato della geometria di Euclide è discusso fin dall'antichità

La geometria di Euclide è stata ritenuta per più di duemila anni la geometria dello spazio reale e quindi l'unica vera e possibile. Il quinto dei suoi cinque postulati, dai quali essa deduce i suoi teoremi, è però apparso poco convincente fin dall'antichità. Il filosofo Proclo osserva, già nel V secolo, che l'enunciazione che ne dà Euclide, e che richiede una lettura attenta e ripetuta per essere compresa, è palesemente inadatta a un postulato. Egli lo riformula perciò in una maniera equivalente, ma più semplice e chiara, che è quella con cui è generalmente conosciuto come "postulato delle parallele":

"*Data una retta R e un punto P non appartenente ad essa, c'è una ed una sola retta passante per P che sia parallela ad R*".

Questa formulazione è chiara e semplice come deve essere quella di un postulato. Proclo rileva però che non di un postulato si tratta, ma di un teorema. Poiché infatti la retta come ente geometrico è, per la seconda delle ventitré definizioni di Euclide, "*lunghezza senza larghezza*", è sensato immaginare che per un punto esterno ad essa passino infinite rette parallele. Che ve ne passi invece una sola va dunque dimostrato, non postulato, dice Proclo, che tenta perciò di costruirne una dimostrazione, ma senza riuscirvi.

Il contributo (1763) del matematico tedesco Georg Klügel
Dopo Proclo, nel corso dei secoli diversi altri matematici hanno provato a trasformare il quinto postulato in un teorema derivato dagli altri quattro postulati e dai cinque assiomi di Euclide. In una dissertazione per la libera docenza in matematica tenuta nel 1763, il matematico tedesco Georg Klügel ha potuto elencare ventinove dimostrazioni del quinto postulato tentate nella storia, ed individuare in ognuna qualche errore.

Lambert, uno degli studiosi più geniali ed enciclopedici del XVIII secolo
La dissertazione di Klügel attira l'attenzione di Lambert, uno degli studiosi più geniali ed enciclopedici del XVIII secolo. Nato nel 1728 a Mulhouse, in Alsazia, da un sarto di origine francese, e suddito del regno di Francia (cui all'epoca l'Alsazia apparteneva), Johann Heinrich Lambert è stato tuttavia battezzato con un nome tedesco, e gli è stata insegnata da bambino la lingua tedesca, perché il padre auspicava per lui la prestigiosa carriera militare presso il militarista re di Prussia Federico Guglielmo I. La carriera di Lambert si svolge poi effettivamente in Prussia, ma come carriera intellettuale presso il re illuminista Federico II. Nel 1756 è ammesso infatti all'Accademia prussiana delle scienze di Berlino per i suoi studi sulle equazioni algebriche e sulle proiezioni cartografiche (una delle quali si chiama ancora oggi proiezione di Lambert). Nel 1760 espone importanti leggi ottiche sull'assorbimento della luce e uno dei primi diagrammi cromatici (ancora oggi conosciuto come diagramma cromatico di Lambert).
Una simile vastità di interessi scientifici lo conduce ad affrontare, non appena ne ha notizia dalla dissertazione di Klügel, il problema del quinto postulato euclideo. Nel 1766 scrive quindi un trattato sulle parallele, che però è ancora inedito alla sua morte, nel 1777, non avendo egli voluto pubblicarlo perché privo di una soluzione, ed è pubblicato postumo nel 1788.

La possibile soluzione del problema proposta da Lambert
Il ragionamento di Lambert è geniale: poiché Klügel ha definitivamente provato che il quinto postulato di Euclide non è deducibile come teorema dagli altri quattro postulati e dai cinque assiomi, la via da seguire è quella di lavorare su enunciati logicamente equivalenti ad esso. Seguendo questa via egli individua alcuni teoremi che Euclide ha dedotto

utilizzando il quinto postulato, e da ciascuno dei quali, congiunto ai primi quattro postulati, il quinto postulato potrebbe essere dedotto, se essi fossero assunti senza dimostrazione. Essi sono quindi logicamente equivalenti al quinto postulato. Uno di essi è il trentaduesimo teorema euclideo, secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°. Poiché questo enunciato è logicamente equivalente a quello del postulato delle parallele, Lambert cerca di dimostrare che, negandolo, si giunge a una contraddizione geometrica, per arrivare a dimostrare, per questa via, che il postulato delle parallele, in quanto gli è logicamente equivalente, non può essere negato. Poiché non riesce a concludere questa dimostrazione, non rende pubblico il suo scritto. Viene poi Kant, che chiude per il momento il dibattito: non è importante capire, egli dice, se quello delle parallele sia un postulato o un teorema, perché, in ogni caso, è un *giudizio sintetico a priori*, e lo spazio che definisce è conseguentemente una forma trascendentale, per cui la sua verità non è revocabile in dubbio.

Il ruolo di Gauss, il più grande matematico della prima metà dell'Ottocento

Dopo trentacinque anni in cui più nessuno ne ha parlato, la questione del quinto postulato di Euclide riaffiora in Gauss, il più grande matematico della prima metà dell'Ottocento, tanto da essere chiamato solitamente "*princeps mathematicorum*".
Nato nel 1777 – l'anno stesso della morte del massimo matematico della generazione precedente, quel Lambert di cui si è appena detto – a Brunswich, la capitale di un piccolo ducato compreso tra Hannover e Wesfalia, Carl Friedrich Gauss proviene da una famiglia umilissima. Il padre è un bracciante agricolo emigrato in città (a Brunswich, appunto) per fare il manovale, e rimasto semianalfabeta. Friedrich, tuttavia, si rivela fin da bambino un genio matematico, tanto che il suo maestro parrocchiale lo presenta al duca di Brunswich, che lo avvia agli studi sostenendone le spese fino alla laurea. Si tratta di un atto di paternalismo culturale verso i poveri non infrequente nel mondo feudale tedesco (si ricordi, ad esempio, il più noto caso di Fichte).

Fin dai suoi primi scritti emerge la sua genialità

Gauss frequenta l'università dal 1795 al 1799 laureandosi presso l'università di Helmstädt, nell'Hannover, con una sbalorditiva tesi di laurea in cui per la prima volta viene data una rigorosa dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra (ogni equazione algebrica a coefficienti complessi ammette almeno una soluzione complessa). Nel 1801 pubblica a Lipsia le *Disquisitiones arithmeticae*, il primo testo della storia della matematica che tratta in maniera compiuta la teoria dei numeri, i cui risultati costituiscono ancora oggi una base imprescindibile nello studio della matematica.

Gauss è accolto nella cerchia dei matematici di massimo prestigio in virtù di una previsione astronomica

Nonostante l'eccezionalità di questi contributi, non è in virtù di essi che Gauss è accolto nella cerchia dei matematici di massimo prestigio, ma in virtù di una previsione astronomica. Nel 1802, infatti, si attende che torni visibile l'asteroide Cerere, nascosto per un periodo dal Sole. Gli astronomi s'impegnano a calcolarne l'orbita, ma tutti commettono degli errori. Gauss, invece, forte dei suoi calcoli algebrici, prevede con assoluta precisione luogo e tempo della ricomparsa di Cerere.

Gauss riesce a continuare i suoi studi e le sue ricerche anche sotto il dominio militare francese

Nel 1806 il duca di Brunswich, il protettore economico e culturale di Gauss, entra nel gruppo di comando dell'esercito prussiano che deve affrontare Napoleone in Sassonia. La storica battaglia di Jena del 14 ottobre 1806 (quella al rombo del cui cannone Hegel

conclude la sua *Fenomenologia)* vede, con la totale disfatta dell'esercito prussiano, la morte in combattimento del duca di Brunswich. I territori del Brunswich, e dei centri universitari dell'Hannover dove Gauss ha studiato, passano all'Impero napoleonico, annessi al regno di Westfalia governato da Gerolamo Bonaparte.
Il secolo nascente si preannuncia come secolo francese (solo i posteri hanno potuto sapere che questo preannuncio non avrà seguito storico). Sul momento, comunque, la carriera di Gauss sembra chiudersi ad ogni prospettiva. Contrariamente alle aspettative, però, i francesi, che pure si rendono odiosi alla popolazione tedesca per come la escludono da ogni carica amministrativa, finanziano e promuovono i centri di studio e gli studi matematici (con quelli medici e giuridici).
Gauss ottiene quindi dal governo napoleonico una cattedra di matematica e insieme di astronomia, con annesso osservatorio astronomico di nuova costruzione, all'università di Gottinga, cattedra che naturalmente conserva nell'età della Restaurazione. Egli fa dell'università di Gottinga un centro di eccellenza matematica, che rimarrà tale fino alla prima guerra mondiale. A Gottinga compie studi di altissimo livello di analisi e metodologia matematiche, in parte editi, in parte lasciati manoscritti e pubblicati postumi, negli anni tra Ottocento e Novecento. Gauss muore a Gottinga nel 1855, ed alla sua morte nessuno conosce ancora le sue meditazioni sulla questione del quinto postulato di Euclide, rimaste celate tra i tanti suoi manoscritti inediti.

Le riflessioni di Gauss sulla questione del quinto postulato di Euclide

In una lettera a un amico, rinvenuta tra i suoi manoscritti e datata al 1824, Gauss, ricordando il tentativo compiuto da Lambert di trovare una contraddizione geometrica nella negazione del trentaduesimo teorema euclideo, scrive di aver scoperto che Lambert aveva fallito non per l'estrema difficoltà di raggiungere il suo obiettivo, ma per l'impossibilità logica di raggiungerlo. Negando infatti quel teorema, ed ammettendo che la somma degli angoli interni di un triangolo sia inferiore a 180°, si possono derivare, da quell'ammissione presa per vera senza dimostrarla, altri teoremi, diversi da quelli euclidei, ma perfettamente coerenti tra loro e con l'ammissione iniziale: il teorema che non esistono figure tra loro simili (cioè con grandezze eguali degli angoli e lunghezze proporzionali dei lati), il teorema che la somma degli angoli interni di un triangolo decresce proporzionalmente al crescere della sua area, il teorema che per un punto esterno ad una retta passano infinite rette parallele alla retta data. Assumendo quest'ultimo teorema come postulato da aggiungere ai primi quattro postulati di Euclide al posto del suo quinto, se ne può derivare, dice Gauss nella lettera all'amico, una *"antigeometria*", che non appartiene allo spazio terrestre, e che potrebbe perciò essere chiamata "*geometria astrale*".
Gauss è talvolta considerato il fondatore della geometria non euclidea, ma questo non è sostenibile: al di là delle considerazioni di cui si è detto, egli non comincia neppure a costruire concretamente la sua geometria astrale. Senza contare che anche quei pochi cenni sono all'interno di una corrispondenza privata, di cui, quando muore nel 1855, nessuno è a conoscenza.

Le ricerche del matematico russo Nikolaj Lobacevskÿ sono ancora interne all'orizzonte della cultura positivistica

Il matematico russo Nikolaj Lobacevskÿ, nato a Makarev nel 1793, viene a conoscenza della questione relativa al quinto postulato di Euclide studiando matematica all'università di Kazan. Constatato il fallimento di tutti i tentativi fatti in passato per dimostrare il quinto postulato, trasformandolo così da postulato in teorema, e falliti i suoi stessi tentativi di dimostrazione compiuti tra il 1815 e il 1817 all'università di Kazan, egli, diventato docente in quella università, cerca un altro postulato da cui dedurre un'altra geometria.
Nel 1829 pubblica una memoria, intitolata *Sui fondamenti della geometria*, in cui pone come postulato quello che per un punto esterno ad una retta passano due parallele alla

retta data. Ne deduce teoremi identici a quelli già dedotti, all'insaputa del mondo scientifico, da Gauss. Benché Lobacevskÿ, a differenza di Gauss, renda pubbliche le sue elaborazioni, non si può ancora parlare di riconoscimento di una geometria non euclidea. Ciò non soltanto perché neppure Lobacevskÿ ne sviluppa tutte le sue possibili deduzioni, ma soprattutto perché non la pone sullo stesso piano della geometria euclidea, mantenendovela subordinata e denominandola *geometria immaginaria*.

Lobacevskÿ è d'accordo, infatti, con quello che è stato detto da Proclo in poi, e cioè che il quinto postulato di Euclide è diverso dai quattro precedenti, perché non ha natura di postulato e richiederebbe di essere dimostrato, e riconosce inoltre che esso non può avere una dimostrazione matematica, per cui lascia spazio all'assunzione di postulati alternativi. Ritiene però che quel postulato non sia matematicamente dimostrabile perché è relativo allo spazio reale della Natura, ed è quindi non una nozione geometrica, ma una legge fisica, la cui vera dimostrazione non può che essere induttiva.

In questo modo Lobacevskÿ rimane ancorato alla cultura positivistica, per la quale può esserci un solo spazio, quello della Natura come realtà in sé, e tale è lo spazio euclideo. I corpi geometrici, però, possono essere immaginati anche in maniera difforme dai corpi fisici, dando così luogo a una *geometria immaginaria*.

Lobacevskÿ muore nel 1856, due anni dopo una famosa dissertazione con la quale Riemann ha compiuto una riconcettualizzazione della geometria senza cui non avrebbero potuto poi esserci né la teoria topologica di Poincaré né la *teoria della relatività generale* di Einstein.

Riemann

Bernhard Riemann nasce nel 1826 a Breselenz, nell'Hannover (il ducato tedesco in cui vive, insegna ed esercita la sua influenza scientifica Gauss, benché nativo del Brunswich) da un ecclesiastico luterano. La famiglia è minata dalla tubercolosi, che lo priva, quando è ancora fanciullo, della madre, di una sorella e di un fratello. È allevato dal padre, che si cura molto della sua istruzione, e lo indirizza agli studi religiosi. Egli si iscrive perciò nel1846 alla facoltà teologica di Gottinga. Si accorge ben presto, però, di non essere interessato ad approfondire la teologia, e, ottenuto il consenso del padre, nel 1847 si trasferisce a Berlino iscrivendosi alla facoltà universitaria di matematica, dove insegna uno dei massimi matematici dell'epoca, Gustav Dirichlet. Sotto la sua guida Riemann raggiunge risultati eccezionali, tanto da voler completare la sua formazione di matematico con il "princeps mathematicorum" Gauss. Nel 1849 si trasferisce perciò a Gottinga, dove si laurea nel 1851 con una tesi sui fondamenti della teoria delle funzioni di variabile complessa, che non è una normale tesi di laurea, ma un testo con nuove scoperte scientifiche.

Si occupa della questione del quinto postulato di Euclide

Gauss, saputo che il nuovo laureato si occupa della questione del quinto postulato di Euclide, ne è molto incuriosito, e lo incoraggia a rendere pubblici i risultati che otterrà. Si giunge alla famosa dissertazione per la libera docenza dal titolo *Sui fondamenti della geometria*, tenuta il 10 giugno 1854 nell'aula magna di Gottinga, davanti ad una commissione giudicante di cui fa parte, più attento di tutti, Gauss.

La mossa geniale di partenza di Riemann è di separare le due nozioni, prima indebitamente fuse, di *spazio* e di *geometria.* Lo spazio non è altro che un insieme di punti. La geometria è una metrica dello spazio, cioè un modo di misurarlo. Possono esserci perciò molteplici geometrie, in base ai criteri di misurazione adottati e alla varietà dello spazio misurato. Egli definisce la varietà un particolare genere di *spazio,* dato dal numero dei punti, e di conseguenza delle dimensioni, che lo individuano. Così lo spazio vettoriale di *genere uno* è quello con una sola dimensione, la lunghezza, individuato da due punti, lo spazio di *genere due* quello con due dimensioni, lunghezza e larghezza, individuato da tre punti, e così via. Tali spazi sono indicati dai simboli R^1, R^2, ecc., dove *R* sta per *spazio (Raum* in tedesco), e l'indice numerico per il numero delle dimensioni che lo costituiscono. La geometria euclidea è una metrica R^3. Le geometrie ottenibili sostituendo il quinto postulato euclideo, la cui natura è quella di essere un parametro di misurazione, con un diverso postulato, sono sempre geometrie di R^3, ma costituite da una diversa metrica, data da una curvatura dello spazio piatto euclideo.

Il fondamentale concetto di *curvatura dello spazio*
Il concetto di *curvatura dello spazio* introdotto da Riemann, è della massima importanza, anche perché su di esso si baserà la teoria einsteiniana della relatività generale. Per capire cosa sia la curvatura *dello* spazio, si può muovere dalla curvatura *nello* spazio. In uno spazio a più dimensioni, la misura di una dimensione di genere inferiore al genere dello spazio è una misura curva se cambia il suo riferimento nella coordinata di genere superiore: così una linea è curva se la misura della sua lunghezza si riferisce a larghezze diverse del piano, e un piano è curvo se la misura della sua superficie si riferisce a piani diversi del volume. Rispetto a un punto esterno alla grandezza misurata, la curvatura può diminuirne o accrescerne la distanza, per cui si può parlare di una *curvatura positiva* e di una *curvatura negativa*, la cui misura è un numero complesso detto tensore. La misura non di una dimensione dello spazio, ma dello spazio stesso, non può incurvarsi rispetto a un'ulteriore dimensione, che per definizione non c'è, ma può modificarsi come se ci fosse. Così uno spazio a *curvatura positiva* è quello la cui metrica è tale per cui non esistono parallele e la somma degli angoli interni del triangolo è superiore a 180°, ed uno spazio a *curvatura negativa* è quello la cui metrica è tale per cui esistono molteplici parallele e la somma degli angoli interni del triangolo è inferiore a 180°. Quest'ultima è la geometria di Gauss e Lobacevskÿ. La prima è una nuova possibilità di geometria concepita da Riemann, il quale però muore appena quarantenne nel 1866 senza averla pubblicata.

La geometria ellittica e la geometria iperbolica
È soltanto nel 1881 che il matematico tedesco Felix Klein espone altre due geometrie, oltre a quella euclidea, della varietà R^3, dando loro i nomi che ancora oggi portano: *geometria ellittica* quella a *curvatura positiva* di Riemann, e *geometria iperbolica* quella a *curvatura negativa* di Lobacevskÿ.

2. Poincaré: scienza, filosofia dell'instabilità, e crisi del positivismo

Gli studi di Poincaré portano alla nascita di una nuova disciplina scientifica, la *topologia algebrica*
Nel 1884, mentre è ancora assistente universitario a Caen, Poincaré, conclusa dopo quattro anni, a partire dal suo metodo di soluzione delle equazioni differenziali ad una variabile indipendente, la sua esplorazione intellettuale delle geometrie non euclidee, si dedica allo studio delle curve che danno la raffigurazione geometrica di tali equazioni.
Nel gennaio 1885 pubblica su tale argomento un importante saggio nella rivista "Acta Mathematica" nel quale le curve in questione, trasformate in cerchi di una sfera attraverso la proiezione del loro piano sulla sfera stessa, diventano potenti strumenti di analisi matematica dell'evoluzione di sistemi dinamici di ogni natura.
Nel luglio 1885, mentre Poincaré sta compiendo i suoi studi sulle curve definite da equazioni differenziali, con i quali fa nascere una nuova disciplina scientifica, la topologia algebrica, sulla rivista inglese "Nature" compare l'annuncio che il re svedese Oscar II ha messo in palio un prestigioso premio che avrebbe consegnato il 21 gennaio 1889, giorno del suo sessantesimo

compleanno, a chi avesse nel frattempo dato un contributo importante alla soluzione di uno tra quattro quesiti matematici proposti da due famosi matematici dell'epoca, il francese Hermite e il tedesco Weierstrass.

Partecipa al concorso indetto dal re svedese Oscar II sul cosiddetto problema dei tre corpi
Il primo dei quesiti proposti riguarda un classico problema di meccanica celeste, per la cui soluzione servono proprio gli strumenti di topologia algebrica in via di costruzione da parte di Poincaré, il quale decide di partecipare al concorso. Il quesito è quello di determinare la funzione del moto di ciascun corpo di un sistema di molteplici interazioni gravitazionali. Si tratta del problema affrontato da Newton come problema dei tre corpi, cioè della reciproca interazione gravitazionale tra Sole, Terra e Luna. Newton si limitò a considerare essenziale l'attrazione del Sole, tale da far descrivere alla Terra un'orbita corrispondente alla legge di Keplero, e a considerare l'attrazione esercitata dalla Luna sulla Terra come semplice perturbatrice di quell'orbita, in ragione della sua forza attrattiva enormemente più debole.
Poincaré consegna il suo lavoro, una ponderosa memoria di centocinquanta pagine, nell'estate 1888. Anch'egli, come Newton, riduce il problema di molteplici interazioni gravitazionali a quello dei tre corpi, risolvendolo con il metodo che aveva ideato per le sue ricerche sulle curve definite da equazioni differenziali. Il risultato cui perviene è che in un sistema di interazioni gravitazionali a tre corpi, le traiettorie di ciascun corpo ripeteranno infinite volte quelle assunte come condizioni iniziali, ma che si possono scegliere particolari condizioni iniziali a partire dalle quali le traiettorie, invece, si avvicineranno soltanto asintoticamente ad esse, senza mai ripeterle identiche.

La vicenda della restituzione del manoscritto a Poincaré per correggere un errore algebrico
Poche settimane dopo la consegna della memoria, un giovane matematico svedese incaricato di predisporne la stampa, Edward Phragmen, scopre un errore algebrico nel manoscritto, che viene restituito per un controllo all'autore. Ciò avviene in palese violazione delle regole del concorso di re Oscar, che avrebbe richiesto l'anonimato dei manoscritti, contrassegnati soltanto da un motto latino. Ma i giudici del concorso conoscono benissimo la grafia di Poincaré, matematico diventato celebre come creatore della *topologia algebrica*, che ha ottenuto nel frattempo la cattedra di fisica matematica alla Sorbona e nel 1887 l'ingresso nell'Accademia francese delle scienze. Essi ne hanno inoltre già letto il manoscritto, e già deciso di assegnargli il premio, considerandolo un capolavoro, per cui desiderano che sia corretto quello che ritengono un banale errore.

Scopre che esistono situazioni fisiche in cui differenze minime nelle condizioni iniziali generano nel tempo differenze enormi
Poincaré, ripreso il manoscritto, non soltanto riconosce l'errore commesso, ma ammette di esservi caduto per un irriflesso pregiudizio filosofico. La correzione dell'errore porta infatti a conseguenze sconvolgenti per la mentalità dell'epoca. Poincaré scopre che in un sistema di interazioni meccaniche le condizioni iniziali da cui si deducono le conseguenze in base alle leggi scientifiche sono conoscibili soltanto approssimativamente (nel caso dei tre corpi, la distanza della Terra dal Sole e dalla Luna alla Terra non può essere fissata esattamente nel senso dell'esattezza al millimetro, o anche al centimetro). Si potrebbe supporre che, date leggi scientifiche perfette, nel senso che i fenomeni naturali si svolgano in maniera perfettamente conforme ad esse, da condizioni iniziali conosciute con una determinata approssimazione si ricavino conseguenze conosciute con la stessa approssimazione. Ma egli dice che le cose non stanno così.
Nessuna legge scientifica è "perfetta". Ma se anche lo fosse, e ci servisse soltanto essa per dedurre le conseguenze di certe condizioni iniziali, in un sistema di interazioni meccaniche esistono particolari condizioni iniziali entro le quali minime differenze generano enormi differenze nei fenomeni finali.

L'esempio del cono rovesciato appoggiato a terra sulla punta
Poincaré fa il famoso esempio del cono rovesciato appoggiato a terra sulla punta: se non avesse la

benché minima dissimmetria, e fosse soggetto soltanto alla forza di gravità, non cadrebbe; una qualsiasi infinitesima deviazione del suo asse dalla verticalità o un qualsiasi infinitesimo disequilibrio della sua materia lo fa però cadere, e differenze minime di tale deviazione e tale disequilibrio possono farlo cadere da parti opposte. Allo stesso modo, minime differenze entro le condizioni iniziali di un sistema astronomico possono generare variazioni rilevanti e del tutto imprevedibili delle orbite.

La *scienza dell'instabilità* di Poincaré mette in crisi il positivismo
Tutte queste riflessioni sono incorporate nella memoria definitiva consegnata da Poincaré a re Oscar, e pubblicata nel novembre del 1890 a Stoccolma. Poincaré ha così cominciato a costruire attraverso l'elaborazione delle sue curve definite da equazioni differenziali, una scienza che mette in crisi il positivismo. Per i positivisti, infatti, la scienza, essendo il rispecchiamento teorico di una Natura stabile e deterministica, può prevedere in modo rigoroso e infallibile lo svolgimento dei fenomeni naturali. Quella costruita dalle equazioni di Poincaré, invece, è una *scienza dell'instabilità*, che concettualizza progressivi allontanamenti da stati iniziali di equilibrio, tali da non essere prevedibili nella loro evoluzione. Egli ha scoperto quelli che nel secolo successivo saranno chiamati sistemi caotici, e si è orientato verso una *filosofia dell'instabilità della Natura*.

3. **La scienza e il metodo**

Nel 1896 Poincaré, rimanendo alla Sorbona, passa dalla cattedra di fisica matematica a quella di matematica astronomica, e si occupa sempre più intensamente di geometrie non euclidee e calcolo delle probabilità in relazione ai sistemi astronomici, e, più in generale, meccanici.

***La scienza e l'ipotes*i (1902)**

Il ruolo dell'ipotesi nella scienza
Nel 1902 pubblica un libro fondamentale, *La scienza e l'ipotesi*, in cui si trovano raccolti saggi scritti nei cinque anni precedenti. Egli si chiede quale sia il ruolo dell'ipotesi nella scienza, e sostiene che per rispondere a questa domanda occorre ammettere che le ipotesi da cui muovono le diverse scienze hanno natura diversa in relazione alla specificità di ciascuna scienza. Le scienze sperimentali si costruiscono con i fatti osservati, così come le case si costruiscono con i mattoni. Ma, dice Poincaré con una frase rimasta famosa, "un insieme di fatti osservati non è una scienza più di quanto un mucchio di mattoni sia una casa". Occorre, per fare una scienza, una generalizzazione dei fatti osservati che costituisca un disegno di quelli passati e una previsione di quelli futuri. Ogni generalizzazione di questo tipo, dice Poincaré, è un'ipotesi, che deve sempre venire sottoposta a prova sperimentale. Se non supera la prova, l'ipotesi deve essere abbandonata, perché non svolge più il suo compito, che è quello di strumento di previsione.

I postulati della geometria come *convenzioni possibili*
Diverso è il caso della geometria, rispetto alla quale le *ipotesi* non sono previsioni, bensì postulati. Ma cosa sono i postulati? Non sono ovviamente giudizi *sintetici a posteriori*, perché altrimenti dovrebbero risultare modificabili dall'esperienza, e ciò negherebbe la loro natura di postulati. Ma non sono neppure giudizi *analitici* o *sintetici a priori*, perché altrimenti non sarebbero concepibili, come invece lo sono, postulati alternativi. Secondo Poincaré, dunque, i postulati della geometria non possono essere altro che *convenzioni* costruite per idealizzazioni di esperienze ottiche (ciò che si postula di una retta, ad esempio, idealizza ciò che si vede propagazione della luce). La scelta tra le *convenzioni* possibili è comunque libera, limitata solo dalla necessità di evitare contraddizioni. Una geometria basata su certe *convenzioni* non può quindi essere più vera di quella basata su altre, ma solo più comoda.

I princìpi della meccanica hanno lo stesso carattere di *convenzioni* dei postulati della geometria

La meccanica è una scienza più teorica che sperimentale, per cui i suoi princìpi hanno lo stesso carattere di *convenzioni* dei postulati della geometria. Anzi, se un postulato di geometria è una convenzione di linguaggio da cui derivare teoremi, un intero sistema di geometria è un sistema convenzionale di linguaggio con cui descrivere la meccanica, che non ha oggetti assoluti, tanto meno lo spazio e il tempo.

Il problema del metodo nella matematica algebrica

La matematica algebrica, infine, pone il problema del *metodo* con cui è costruita. Se il metodo è *deduttivo*, perché essa non si risolve in un'immensa tautologia? O forse lo è? Forse, dice Poincaré, le sue equazioni non sono che modi molto contorti di dire che A= A? Se invece il metodo è *sperimentale*, da dove essa trae il suo rigore? Poincaré mostra come tutta la matematica si fondi su un *teorema di ricorrenza* (in seguito chiamato, impropriamente secondo il linguaggio filosofico, *principio di induzione matematica*), la cui enunciazione è che se una proprietà è vera per il numero *n* e per *n*+1, allora è vera per tutti i numeri interi positivi. Da cosa trae validità, si chiede Poincaré, questo *teorema di ricorrenza*? Non da una deduzione, perché non c'è assioma da cui possa derivare. Ma neppure dall'esperienza, che potrebbe dirci che esso vale per i primi centomila, un milione, un miliardo di numeri interi positivi, ma non certo per la loro serie infinita. Questo è dunque un tipico giudizio *sintetico a priori*. La matematica superiore è dunque fatta di giudizi *sintetici a priori*, e trae il suo rigore non dalla deduzione, ma dalla virtù creatrice del pensiero che costruisce un edificio di concetti evitando la contraddizione.

Come definire l'epistemologia di Poincaré

L'epistemologia di Poincaré è stata catalogata nei manuali come *convenzionalista:* la scienza cioè, sarebbe fatta per lui di *convenzioni*. Ciò è vero, nell'epistemologia di Poincaré, soltanto riguardo alla geometria, alla meccanica ed alle scienze classificatorie (come zoologia e botanica). Nei rami superiori della matematica la scienza non è *convenzionalista* ma *sintetica a priori*, e nelle scienze sperimentali è *predittivo-pragmatica*. Negli ultimi anni della sua vita Poincaré si occupa di elettromagnetismo e termodinamica, riflettendo profondamente sull'irreversibilità e la reversibilità dei processi, e considerando la reversibilità un'idealizzazione irreale utile come strumento pratico.