Russell

(Richiamo on line **p.508**)

1. La sistemazione della logica simbolica

La *teoria delle descrizioni* è ulteriormente elaborata nei *Principia mathematica*, l'opera pubblicata tra il 1910 ed il 1913, scritta da Russell in collaborazione con Whitehead, che tra tutte ha esercitato la maggiore influenza sugli sviluppi successivi della filosofia della scienza.
Se ne *I princìpi della matematica* Russell aveva cercato di dimostrare che la matematica non è che un ramo della logica, ora, nei *Principia mathematica,* si propone di dare alla logica uno sviluppo tale che da essa possano venire effettivamente derivate le proposizioni matematiche. Egli elabora quindi, in collaborazione con Whitehead, tutto un sistema di nozioni – poi generalmente adottato nell'ambito della filosofia della scienza e conosciuto come logica simbolica – atto a esprimere con appropriati simboli l'intero universo degli elementi di base del discorso logico umano, sulla base del presupposto che le proposizioni scientifiche siano composti di più unità proposizionali, e che il loro valore di verità dipenda dal valore di verità delle proposizioni elementari di cui sono composte. Il valore di verità delle proposizioni scientifiche è infatti da lui denominato *funzione di verità*.
Nell'ambito della concezione che ha Russell delle proposizioni scientifiche e del loro valore di verità, gli elementi logici più importanti sono quelli da lui denominati *connettivi* oppure *operatori proposizionali*, cioè quegli elementi che connettono tra loro più proposizioni elementari in una proposizione composta, di cui determinano quindi la funzione di verità. Se, ad esempio, una proposizione composta consiste nell'affermazione che tra due proposizioni semplici *p* e *q*, almeno una deve essere vera, essa si scrive *pvq*, dove il simbolo v indica il connettivo che esclude la falsità di *p* e di *q* ad un tempo.
L'operatore proposizionale o connettivo che, opportunamente specificato, serve a individuare la matematica come ramo della logica, è costituito per Russell dal rapporto di implicazione. Esso è quel rapporto che lega tra loro due proposizioni *p* e *q* nella forma se *p* allora *q*, e che è designato con il simbolo ⊃.
Per dire che la proposizione *p* implica la proposizione *q* si scrive dunque $p \supset q$.
Tutti gli elementi logici possono secondo Russell venire espressi tramite rapporti di implicazione. La stessa proposizione elementare isolatamente presa è identificabile come tale mediante la nozione di implicazione, perché può venire definita quale enunciato che implica se stesso. La matematica è quella sfera della logica che è costituita da una sottospecie di rapporti di implicazione definiti da Russell come rapporti di *implicazione formale*. Per capire cosa sia l'implicazione formale occorre introdurre la nozione di *funzione proposizionale*. Si dice dunque *funzione proposizionale* quell'espressione logica che contiene tra i suoi elementi un termine variabile, e che si trasforma in proposizione vera e propria qualora il suo termine variabile venga sostituito da un termine determinato. Se ad esempio si dice "esiste un x che è una città dell'Inghilterra, e ne è anche la capitale", questa è una *funzione proposizionale*. Ove ad "un x" si sostituisca "Londra" o "Parigi", ne viene una proposizione, vera nel primo caso, falsa nel secondo caso. Ebbene: *un'implicazione tra due funzioni proposizionali contenenti la stessa variabile, che valga per tutti i valori possibili di tale variabile, si dice implicazione formale*. Le relazioni matematiche sono dunque *implicazioni formali*.
Per comprendere la nozione di *implicazione formale* della logica matematica, bisogna aver chiaro che l'implicazione di cui essa è una sottospecie, ha come sua altra sottospecie l'implicazione materiale che è molto diversa dall'implicazione logico-dialettica. Come sa chiunque ricordi la *Logica* di Hegel, nell'ambito della dialettica un concetto è implicato da un altro quando non può venire definito prima e indipendentemente da quell'altro, ma la sua definizione deriva logicamente dal contenuto di verità di esso (dato che ogni contenuto di verità si contraddice in se stesso e porta quindi oltre se stesso). Nell'ambito della logica matematica, invece, poiché si ha a che fare con concetti posti adialetticamente, vale a dire definiti ciascuno indipendentemente dall'altro, l'implicazione tra due concetti non può significare che l'uno scaturisca dal contenuto dell'altro, e le proposizioni che li esprimono debbono dunque avere isolatamente prese il loro senso ed il loro

valore di verità. L'implicazione materiale tra due proposizioni, quindi, non può significare niente altro che la verità della proposizione implicante e la falsità della proposizione implicata si escludono. Se infatti volessimo attribuire all'implicazione materiale qualche altro requisito oltre questo, dovremmo introdurvi condizioni non coerenti con la concezione del linguaggio come nesso di proposizioni elementari, cioè isolatamente significanti in rapporto ai dati di realtà da cui sono tratte, che è propria di Russell e della successiva filosofia della scienza. Russell è ben consapevole di ciò, tanto che, nel definire l'implicazione, afferma che, perché due proposizioni o funzioni proposizionali *p* e *q* siano tali che la prima implichi la seconda, non occorre altra condizione oltre quella di non potersi dare il caso che, essendo vera *p*, ciò nondimeno *q* sia falsa. Nel suo linguaggio simbolico questa condizione viene così espressa: $p \supset q = - pvq$

Cioè: *p* implica *q* è uguale alla condizione che o p sia falsa oppure q sia vera. Basta infatti che siverifichi una sola di queste due possibilità, cioè la falsità di *p* o la verità di *q*, perché rimanga automaticamente escluso che, essendo vera *p*, *q* ciò nondimeno sia falsa, e perché sia quindi soddisfatta quell'unica condizione che è necessaria all'esistenza dell'implicazione per una logica tratta dalla matematica. Un'implicazione così definita dà luogo a varie conseguenze paradossali. In base ad essa, infatti, una proposizione vera ammette di essere implicata da una qualunque altra proposizione. Prendiamo ad esempio la frase "se oggi è domenica, allora l'Inghilterra è una monarchia". Ebbene: essa soddisfa le condizioni di una vera e propria implicazione, perché non è certo possibile che l'Inghilterra non sia, oggi, una monarchia, anche se oggi non è domenica. Non solo, ma in base alla definizione sopra data di implicazione, una proposizione falsa può implicare qualunque altra proposizione. Se dicessimo "se l'Inghilterra sta in Africa, la Francia, allora, sta in Asia", anche questa può essere considerata un'implicazione corretta, perché, essendo falsa la premessa, non si può certo dire che la falsità della conseguenza segua alla verità della premessa.

Russell, con molta coerenza, ammette che la sua definizione logico-matematica di implicazione porti tutte le conseguenze che abbiamo illustrato, che anzi, lui stesso chiarisce ed esemplifica. Questo, però, non gli suggerisce che una logica tratta dalla matematica, avendo queste conseguenze, debba avere qualche inadeguatezza. Egli conclude piuttosto che quelle implicazioni di strano genere possono venire accettate come tali, in quanto la loro accettazione non intralcia la costruzione della scienza matematica. Rimane peraltro il fatto che la matematica è scienza se le implicazioni di cui consiste sono dotate di necessità logica. Ma la definizione che è stata data di implicazione non spiega come essa possa avere necessità logica. Prendiamo ad esempio le seguenti due funzioni proposizionali: "se x è neve, x si scioglie a 0°". Esse sono legate da un rapporto che è implicazione. Ma perché tale implicazione sia dotata di necessità logica, occorre che valga per tutti i valori possibili della variabile x. Occorre, cioè, che qualunque quantitativo di neve sia preso in qualunque tempo e dovunque nel mondo, esso si sciolga se portato a 0° di temperatura, ovvero che l'implicazione sia non genericamente tale, cioè materiale, ma sia un'implicazione formale. La necessità di tale implicazione esigerebbe però quella perfetta validità del metodo induttivo che Russell, come si è visto, ha sulla scorta di Hume respinto.
Come concepire allora un'implicazione logicamente necessaria? Dopo incertezze e oscillazioni, Russell arriva alla conclusione, nell'ultimo dei tre volumi dei *Principia mathematica*, che la necessità logica non può sussistere che come tautologia. Il passaggio tautologico è ora riconosciuto come l'unico passaggio del discorso che si sottragga alla dipendenza empirica, e quindi alla contingenza, e possa perciò essere compiuto a priori, ovvero secondo piena necessità.

Logica e mondo empirico

La conclusione dei *Principia* introduce un maggior grado di coerenza nel pensiero di Russell, poiché, entro un punto di vista empiristico, per il quale significato e verità delle proposizioni siano dati soltanto dai loro referenti empirici, non può effettivamente sussistere altra necessità che quella della tautologia, e perché le costruzioni matematiche, alle quali soltanto il punto di vista scientistico di Russell attribuisce dignità di scienza, sono davvero tautologie. In una nota alla sua Introduzione alla filosofia matematica, l'opera in cui vengono esposte in maniera più succinta e accessibile le tesi sviluppate nei *Principia mathematica*, Russell ascrive al suo discepolo Wittgenstein il merito di avergli fatto capire l'importanza della tautologia per la definizione della logica matematica.

2. La teoria dei tipi

Nel preparare i *Principia matematica* Russell scopre un'antinomia relativa all'uso della nozione di classe. Essa definisce, lo ricordiamo, un insieme di oggetti dotati di una medesima proprietà che è condizione necessaria e sufficiente di appartenenza all'insieme stesso. Ebbene: tra le proprietà che possono venire prese in considerazione per la costituzione di un insieme c'è anche quella dell'appartenenza o meno di una classe a se medesima. Ci sono, cioè, alcune classi che hanno la proprietà di essere membri di se stesse, ed altre classi che hanno la proprietà di non essere membri di se stesse, per cui si può costruire anche la classe di tutte le classi appartenenti a se stesse e la classe di tutte le classi non appartenenti a se stesse. Ad esempio, la classe di tutti i concetti appartiene a se stessa, perché è essa stessa un concetto. La classe di tutti i pesci, invece, non appartiene a se stessa, perché non è un pesce. O ancora: la classe di tutte le classi la cui proprietà sia descrivibile con meno di venti parole è membro di se stessa, perché è stata descritta con tredici parole. La classe di tutte le città con più di ventimila abitanti non è invece membro di se stessa, perché non è neppure una città.

L'antinomia scoperta da Russell nasce qualora si domandi se la classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse appartenga oppure no a se stessa. Si può infatti facilmente mostrare come qualunque risposta data a questa domanda sia impossibile perché in sé contraddittoria. Infatti: se la classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse appartiene a se stessa, allora, contraddittoriamente, non appartiene a se stessa, proprio perché appartiene a se stessa; se invece la classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse non appartiene a se stessa, allora gode della sua proprietà, perché appunto la sua proprietà è la non appartenenza a se stessa, ovvero, contraddittoriamente, appartiene a se stessa proprio perché non appartiene a se stessa.

Quando Russell comunica per lettera la scoperta di tale antinomia al grande matematico Frege, questi gli risponde che essa rischia di far crollare l'intero progetto della riduzione della matematica a logica. Russell trova tuttavia nei *Principia mathematica* la soluzione dell'antinomia: essa consiste nella complessa costruzione di una gerarchia delle funzioni proposizionali in base al campo di estensione degli oggetti chiamati a soddisfare le loro variabili. Le funzioni preposizionali, e quindi le proposizioni e le classi ad esse corrispondenti, sono dunque ascritte a diversi tipi situati a diversi livelli logici. Un tipo di proposizioni e di classi è di livello logico più elevato di un altro, quando il campo di oggetti cui le sue proposizioni e le sue classi si riferiscono è più vasto del campo di oggetti a cui si riferiscono le proposizioni e le classi dell'altro. Fissata questa nozione, Russell stabilisce la norma che ogni funzione preposizionale ha un significato soltanto se appartiene ad un tipo logico più elevato di quello a cui appartengono gli argomenti su cui verte, e che ogni classe ha un significato soltanto se appartiene ad un tipo logico più elevato di quello a cui appartengono i suoi membri.

Egli sostituisce quindi alla tradizionale dicotomia tra vero e falso una tripartizione degli enunciati, che possono dunque essere:

- enunciati veri
- enunciati falsi
- espressioni senza significato che non enunciano nulla.

L'introduzione degli enunciati senza significato come categoria distinta da quella degli enunciati falsi è giustificata logicamente da Russell con la considerazione che non tutti gli enunciati non veri hanno la verità nel loro contrario. Ora il contrario del falso è il vero, per cui il contrario di un enunciato falso deve essere necessariamente un enunciato vero. Ad esempio, dire che di notte splende il sole è dire il falso, e infatti dire il suo contrario, che cioè di notte non splende il sole, è dire il vero. Ma dire che Socrate è identico, osserva Russell, pur non essendo vero, non è neanche falso, perché il suo contrario, Socrate non è identico, non è neppure esso vero. Si tratta dunque di un'espressione priva di significato. La *teoria dei tipi* stabilisce appunto la condizione del significato di un'espressione. Essa rivela che le antinomie logiche, non rispettando tale condizione, sono proposizioni opposte prive entrambi di significato. Così l'insidia da esse posta alla fondazione logica della matematica scompare.